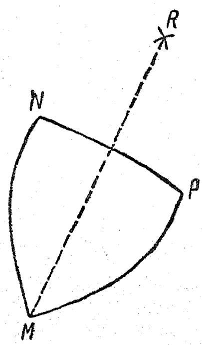
О штейнеровских построениях на сфере

Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону)

§ 1. В настоящей заметке я ставлю своей целью доказательство возможности штейнеровских[1] построений на сфере. При этом, конечно, в само понимание штейнеровских построений я ввожу необходимый корректив. На плоскости эти построения производятся с помощью заданного малого круга с центром. На сфере следует заменить линейку циркулем постоянного раскрытия, описывающим большой круг (т. е. радиуса в 90°). Таким образом при таких построениях у нас в руках только один циркуль, описывающий большой круг.



Черт. 1.

Эвклидовым же построениям с циркулем и линейкой отвечают построения с д в у м я ц и р к у л я м и: с постоянным раскрытием, вычерчивающим большой круг (I), и переменным, вычерчивающим малые круги (II).

Мы докажем, что *все задачи, разрешаемые с помощью этих двух циркулей, разрешимы также штейнеровскими построениями.*

Вне сомнения, что предлагаемые при доказательстве построения слишком сложны. Следует разыскать другие — более простые и изящные. Но сейчас меня интересует только т е о р е т и ч е с к и й в ы в о д, относящийся к штейнеровским построениям.

§ 2. Следует начать с некоторых элементарных замечаний, относящихся к построениям на сфере:

1) Две точки, не отстоящие друг от друга на 180°, N, P можно соединить дугой большого круга, которая в этом случае вполне определяется. Для этого следует только из N и P радиусом в 90° описать циркулем (I) круги и из точки пересечения M описать круг тем же радиусом.

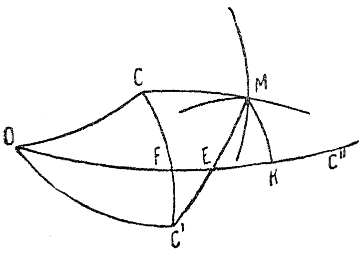
2) Угол с вершиной в центре заданного круга можно разделить пополам с помощью циркуля (I) совершенно таким же образом, как угол на плоскости.

Но это построение уже не годится для угла, из вершины которого мы не имеем описанного малого круга. Нам тогда остается описать из вершины M большой круг. Но тогда точка M и точка пересечения кругов, описанных из N и P (черт. 1), будут отстоять на 180° и, конечно, не определят биссектрисы (через них проходит бесконечное число больших кругов, в числе которых и биссектриса).

3) Построение биссектрисы угла, образованного какими угодно большими кругами, значительно сложней.

[1] Jacob S t e i n e r, Gesammelte Werke, Bd. I, Berlin, 1881. Die geometrischen Constructioner ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, S. 461—522; А д л е р ъ, Теорія геометрическихъ построеній, Одесса, 1910, глава II, стр. 74; В е б е р ъ - В е л ь ш т е й н ъ, Энциклопедія элементарной математики, Одесса, 1913, глава I, § 5, стр. 19.

Из O (центра штейнеровского круга) проводим сферические радиусы, перпендикулярные к нашим кругам (C) и (C'), что достигается, соединяя O с C и с C' большими кругами. Угол между OC и OC' равен углу между кругами (C) и (C'). Мы уже умеем [(2)] делить данный угол COC' пополам. Пусть биссектриса (черт. 2) — OC''.



Черт. 2.

Остается провести через M большой круг, перпендикулярный к OC''. Если расстояние точки M от OC'' меньше 90°, то, как мы сейчас увидим, это легко сделать.

Но, что условие это выполнено, — это видно из того, что OC'', пересекая OC, пересекает и одну из других сторон треугольника $CC'M$, например, MC'. Расстояние M от OC'':

$$MK \leqslant ME < MC' = 90^\circ.$$

4) Опускание перпендикуляра из точки вне большого круга на этот круг производится построением, вполне аналогичным тому, которое применяется на плоскости для прямой. Восстановление совершается, описывая из точки P в расстоянии от A

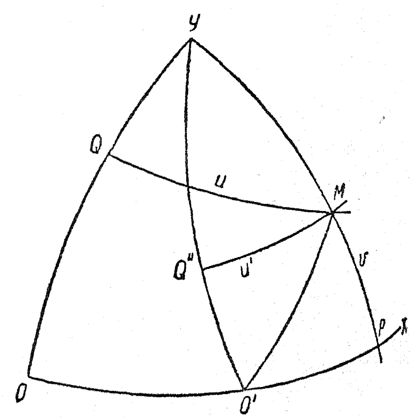
$$PA = 90^\circ$$

большой круг.

5) Теперь покажем, как совершается перенос отрезков к центру штейнерова круга. Для этого предварительно заметим, что если в равнобедренном треугольнике $\triangle CAI$ провести биссектрису AF, проводя CB и соединяя точку P пересечения CB и AF с I, — получим $AK = AB$ (черт. 8).

Это нетрудно видеть, применяя известные теоремы о конгруэнтности треугольников, остающиеся в силе и на сфере. Операцию деления угла пополам мы можем производить, а потому можем и перенести отрезок с одной стороны угла на другую.

Чтобы AB перенести в O по направлению OL, соединяем L и O большим кругом, найдя полюс C для OA; проводим еще CA и, таким образом, имеем равнобедренный треугольник $\triangle OCA$. Затем, описывая из A круг циркулем (I) в I, продолжаем AB до I, пересечения с этим большим кругом, — получаем другой равнобедренный треугольник $\triangle CAI$. Остается так, как мы указали, AB перенести в AK и в $\triangle OCA$ CK перенести в CN, и совершенно так же, как AB перенесли в AK, можем ON перенести в любое направление OL.



Черт. 3.

6) Самым важным является следующий вывод (черт. 3): возможность построения при центре O штейнеровского круга трипрямоугольника с прямыми углами в O, P, Q и со сторонами OP и OQ, равными заданным геометрическим отрезкам. В самом деле, возможен перенос этих отрезков в OP и OQ, и возможно восстановление перпендикуляров в P и Q. Следует помнить, что четвертый угол R не прямой, а т у п о й.

7) Перенос угла, конечно, сводится к переносу дуги большого круга, заключенной между сторонами угла и его измеряющей.

§ 3. Для дальнейшего важное значение имеет исследование такого трипрямоугольника (черт. 3).

Если OX и OY принять за оси координат, обозначать через u, v, w расстояние точки M от OY, расстояние от OX и расстояние от O, то можно считать за координаты точки M на сфере, аналогичные вейерштрасовым координатам на плоскости Лобачевского,

$$x = \rho \sin \frac{u}{\rho}, \quad y = \rho \sin \frac{v}{\rho}, \quad z = \rho \cos \frac{w}{\rho}, \tag{1}$$

где ρ — радиус сферы. При надлежащем выборе масштаба, не нарушая общности, можем положить $\rho = 1$ и брать формулы (1) в виде:

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = \cos w, \tag{1'}$$

уравнение большого круга представить в виде:

$$ax + by + cz = 0, \tag{2}$$

где a, b, c — координаты центра, если оно приведено к нормальному виду, т. е.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{3}$$

причем x, y, z обязательно связаны соотношением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{4}$$

Уравнение малого круга:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{5}$$

где

$$d = \cos r, \tag{6}$$

— радиус его.

К выводу уравнений (2) и (5) и к истолкованию геометрического значения коэфициентов следует прежде всего итти через формулы преобразования координат.

Прежде всего продвижение начала O по OX. Вместо OY, где Y — полюс OX, берется $O'Y$:

$$OO' = d.$$

В силу основной формулы сферической тригонометрии из $\triangle OO'M$ (черт. 3):

$$\cos w = \cos w' \cos d + \sin w' \sin d \cos OO'M.$$

Но из $\triangle OMO'$:

$$\sin w' \sin YO'M = \sin u,$$

а так как $\sin YO'M = \cos MO'X = -\cos OO'M$,

$$z = z' \cos d - x' \sin d.$$

Но

$$x^2 + z^2 = x'^2 + z'^2 = 1 - y^2,$$

и поэтому

$$x = \pm (x' \cos d + z' \sin d).$$

Знак следует брать $+$, ибо при $d = 0$

$$x = x'.$$

Таким образом для случая продвижения начала O по OX имеем:

$$x = x' \cos d + z' \sin d, \tag{7}$$

$$y = y', \tag{8}$$

$$z = -x' \sin d + z' \cos d. \tag{9}$$

Точно таким же образом, в случае передвижения O по OY имеем:

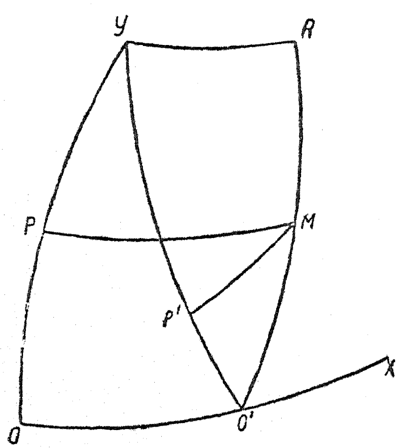
$$x = x', \tag{10}$$

$$y = y' \cos e + z' \sin e, \tag{11}$$

$$z = -y' \sin e + z' \cos e. \tag{12}$$

К этим формулам (4), (5), (6) и (7), (8), (9) следует еще прибавить формулы, относящиеся к повороту осей на угол α при неизменности начала O.

Всякому такому преобразованию будет отвечать преобразование координат первого исследуемого типа. В самом деле (черт. 4), принимая за начало вместо $O\,O'$ мы можем определить положение M координатами



Черт. 4.

$$Y = YP, \ \ldots, \ Z = YR,$$
$$Y' = YP', \ \ldots, \ Z' = YR,$$

замечая, что

$$Z' = \cos\, O'M = \sin RM = \sin YP' = x'.$$

Остается применить формулу (7) и заметить, что $d = \alpha$, чтобы получить:

$$Y = Y' \cos \alpha + X' \sin \alpha.$$

Отсюда легко получить и формулы для X в Y', X'.

Таким образом получаем еще третью группу формул:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \tag{13}$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \tag{14}$$

$$z = z', \tag{15}$$

совершенно аналогичную той, которой пользуемся на плоскости при повороте осей координат.

§ 4. Теперь выведем уравнение большого круга (играющего на сфере ту же роль, что прямая на плоскости) и малого круга (отвечающего кругу на плоскости).

Круг определяется как геометрическое место точек, равноотстоящих от некоторой точки (центра). Если O — полюс большого круга — примем за начало координат, то будем иметь:

$$w = \rho = \text{const},$$
$$\cos w = \cos \rho, \quad \text{т. е.} \ z = \cos \rho. \tag{16}$$

Чтобы иметь общее уравнение, следует совершить общее преобразование координат, перенося двумя передвижениями начало в OX и OY.

Первое преобразование передвижения по OX на отрезке $d' = OF$ приводит уравнение (16) к виду:

$$-x' \sin d' + z' \cos d' = \cos \rho \tag{17}$$

(черт. 5). Второе передвижение по OF на $e = FO'$:

$$-x'' \sin d' - y'' \sin e \cos d' + z'' \cos e \cos d = \cos \rho. \tag{18}$$

Заметим, что из $\triangle\, OO'F$:

$$\cos e \cos d = \cos f, \quad f = OO'.$$

Это — третья координата O' относительно старых координат или O относительно новых: z_0''.

Из

$$\triangle\, COO': \quad \sin e = \sin f \sin O'OF = \sin f \cos O'OE,$$
$$\triangle\, COE: \quad \sin e' = \sin f \sin OO'E.$$

Но

$$\sin OO'E = \frac{\cos O'OE}{\cos d},$$

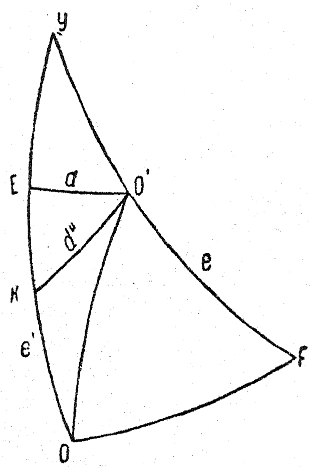
что дает

$$\frac{\sin e'}{\sin e} = \frac{1}{\sin d}.$$

Мы получили формулы, относящиеся к трипрямоугольнику $OFO'E$:

$$\sin e = \sin e' \cos d, \tag{19}$$

$$\sin d = \sin d' \cos e. \tag{20}$$



Черт. 5.

Взяв вместо $EO'FO$ трипрямоугольник $O'GOF$ с прямым углом при O', получаем, полагая $OG = e''$,

$$\sin e'' = \sin e \cos d$$

и, замечая, что

$$-\sin e'' = Y_0'', \quad -\sin d = X_0''$$

— координаты O, т. е. центра окружности, получаем уравнение в новых координатах:

$$X''X_0'' + Y''Y_0'' + Z''Z_0'' = \cos \rho.$$

Таким образом мы не только получаем общие уравнения для малого круга:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{5}$$

и для большого ($\rho = 90°$):

$$ax + by + cz = 0, \tag{3}$$

но можем определить и координаты его центра, приводя уравнение к нормальному виду умножением на

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

А именно, эти координаты:

$$X_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad Y_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad Z_0 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{21}$$

§ 5. При построении с двумя циркулями мы должны предположить координаты центров проводимых кругов данными или получаемыми как пересечения малых и больших кругов.

Так как координаты точек пересечения

$$ax+by+cz+d=0,$$

$$a'x+b'y+c'z+d'=0,$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

определяются квадратным уравнением с коэфициентом, рациональным относительно a, b, c, a', b', c', то мы сейчас же видим, какие выражения могут быть построены с помощью таких циркулей (I) и (II).

Это, во-первых, выражения нулевого класса (здесь отрезки), определяемые из уравнения:

$$\omega(z) = \Omega(\omega(\alpha), \omega(\beta), \omega(\gamma), \ldots), \tag{22}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ заданы, ω означает синус или косинус, Ω — рациональная функция с рациональными коэфициентами; затем выражение 1-го класса, определяемое уравнением

$$\omega(z) = \Omega^{(1)}(\omega(\alpha), \omega(\beta), \omega(\gamma), \ldots, Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \ldots, Z_k^{(1)}), \tag{23_1}$$

где $Z_j^{(1)}$ определяется квадратным уравнением:

$$\sum_{k=0}^{k=\nu_j} H_{jk}^{(1)}(\omega(\alpha), \omega(\beta), \omega(\gamma), \ldots) Z_j^{(1)k} = 0, \tag{24_1}$$

где $\Omega^{(1)}$, H_{jk} — знаки рациональных функций.

За этим идут выражения 2-го класса

$$\omega(z) = \Omega^{(2)}(\omega(\alpha), \omega(\beta), \omega(\gamma), \ldots, Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \ldots, Z_k^{(1)}, Z_1^{(2)}, \ldots, Z_l^{(2)}), \tag{23_1}$$

где $Z_j^{(2)}$ определяется квадратным уравнением

$$\sum_{k=0}^{k=\nu_j} H_{jk}^{(2)}(\omega(\alpha), \omega(\beta), \ldots, Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \ldots, Z_k^{(1)}) Z_j^{(2)k} = 0, \tag{24_1}$$

и т. д.

§ 6. Можно доказать и обратное, что *все такие выражения могут быть построены и не только с помощью циркулей (I) и (II), но и с помощью заданного малого круга с центром и циркулем (I).*

Прежде всего отметим важные формулы, относящиеся к трипрямоугольнику (черт. 6)[2]. Из $\triangle QRP$:

$$\frac{\sin R}{\sin\lambda}=\frac{\sin PQR}{\sin y}=\frac{\cos OQP}{\sin y},$$

$$\lambda=PQ,$$

$\triangle OQP$:

$$\cos OQP=\frac{\operatorname{tg} y'}{\operatorname{tg}\lambda}, \tag{25}$$

$$\sin R=\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\cdot\frac{\sin y'}{\cos y'}=\frac{\sin y'}{\sin y}\cos x',$$

так как

$$\cos\lambda=\cos x'\cos y'.$$

Точно таким же образом

$$\sin R=\frac{\sin x'}{\sin x}\cos y'. \tag{26}$$

Из $\triangle ROP$:

$$\sin y=\sin z\sin ROP=\sin z\cos ROQ,$$

$\triangle ROQ$:

$$\sin y'=\sin z\sin QRO,$$

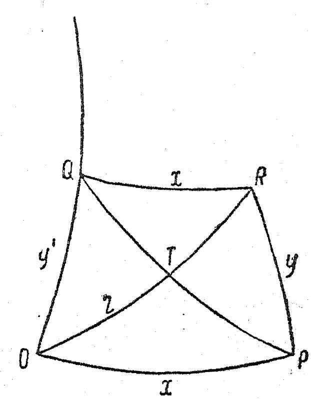
$$\sin QRO=\frac{\cos ROQ}{\cos x}, \tag{27}$$

что дает

$$\frac{\sin y'}{\sin y}=\frac{1}{\cos x},$$

и таким образом,

$$\frac{\sin x'}{\sin x}=\frac{1}{\cos y}.$$



Черт. 6.

В результате получаются пропорции:

$$\frac{\sin x}{\sin x'}=\frac{\cos y}{1}=\frac{\cos y'}{\sin R}, \tag{28}$$

$$\frac{\sin y}{\sin y'}=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos x'}{\sin R}. \tag{29}$$

Разделяя почленно:

$$\cos x'=\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y'},\qquad \cos y'=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x'}. \tag{30}$$

Из основной формулы сферической тригонометрии

$$\cos\lambda=\cos x\cos y+\sin x\sin y\cos R=\cos x'\cos y',$$

полагая

$$\cos x=\frac{\sin y}{\sin y'},\qquad \cos y=\frac{\sin x}{\sin x'},\quad \cos x\cos y=\cos x'\cos y',$$

получаем:

$$\frac{\cos x}{\cos y}\cos^2 y'-\cos x\cos y=\sin x\sin y\cos R,$$

[2] Ср. Д. Мордухай-Болтовской, О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. In memoriam N. I. Lobatschevskii (Vol. II, 1926). Казань, 1927, стр. 16.

откуда

$$\frac{\cos x}{\cos y}(\cos^2 y' - \cos^2 y) = \sin x \sin y \cos R,$$

и, имея в виду, что в силу (14)

$$\sin^2 y' - \sin^2 y = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin^2 y,$$

$$\cos^2 y - \cos^2 y' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin^2 y,$$

получаем:

$$\cos R = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \tag{31}$$

а согласно (28)

$$\cos R = -\sin x' \sin y'. \tag{32}$$

Далее, заметим, что из $\triangle ROQ$ и $\triangle ROP$:

$$\sin y = \sin z \cos ROQ,$$
$$\sin x = \sin z \cos ROP,$$

откуда

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 z. \tag{33}$$

§ 7. Начнем с выражения нулевого класса (22). Прежде всего остановимся на умножении: определяем x из уравнения:

$$\cos x = \cos a \cos b, \tag{34}$$

где a, b заданы. Конечно, к (34) приводятся и аналогичные уравнения, в которых вместо cos стоит sin.

Все, конечно, сводится к переносу a и b на OX и OY и к построению дуги большого круга PQ и переносу ее в то место, которое ей полагается, с помощью операций § 2, 5) в обратном порядке.

Затем идет деление:

$$\cos x = \frac{\cos a}{\cos b}. \tag{35}$$

Здесь мы должны вспомнить формулу (28):

$$\cos y = \frac{\sin x}{\sin x'},$$

под нее подведется (35) заменой y на x, $90° - x$ на a, $90° - x'$ на b.

Мы получим решение этой задачи, если будем в состоянии строить трипрямоугольники по x' и x. Это, конечно, возможно, если вспомнить, что мы можем восстанавливать и опускать перпендикуляры [§ 2, 4)].

Сложение мы производим, применяя формулу (33), причем мы, умея строить по α x из уравнения:

$$\cos^2 x = \cos \alpha, \quad \cos x = \sqrt{\cos \alpha},$$

или, что то же, y из уравнения

$$\sin y = \sqrt{\cos \alpha}, \quad x = 90° - y, \tag{36}$$

можем свести его к

$$\cos x = \cos a + \cos b. \tag{37}$$

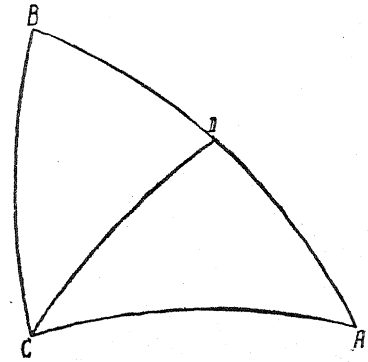
Решение (36) это — определение по гипотенузе двух катетов, при условии, что они равны.

Задача сводится к построению прямоугольного треугольника $\triangle ACD$ (черт. 7) (где $CD \perp AB$), в котором $AD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACD = 45°$. Это возможно. Следует найти $u = CD$ из равенства

$$\sin u = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \tag{38}$$

что можно сделать, умея делить α пополам и строить формулу (35).

Зная же CA, $\angle ACD$, мы можем построить и $\triangle BCD$ и, наконец, $\triangle ABC$.



Черт. 7.

Действия над целыми числами, т. е. построение выражений типов:

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = m \cos a, \\ &\cos x = \frac{\cos a}{m}, \\ &\cos x = \cos a + m, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

можем свести к рассмотренным, так как можем заменить единицу (чтобы дуга была меньше 90°) через $2\cos^2 45° = \cos^2 45° + \cos^2 45°$.

Итак, все выражения нулевого класса (22) могут быть построены при данном круге циркулем (I).

§ 8. Так как мы можем строить выражение (36), то сумеем построить и выражение общего типа:

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{\omega(\alpha_1)\,\omega(\alpha_2)\,\ldots\,\omega(\alpha_m)}{\omega(\beta_1)\,\omega(\beta_2)\,\ldots\,\omega(\beta_n)}}, \tag{40}$$

где знак ω — знак sin, cos, tg или ctg, вообще,

$$\omega(x) = \sqrt{\Omega\,[\omega(\alpha),\ \omega(\beta),\ \omega(\gamma),\ \ldots]}, \tag{41}$$

так как оно сведется к (36).

Отсюда сейчас следует и возможность построения выражения 1-го класса, так как уравнение (24) решается в квадратных радикалах. Рассуждая совершенно так же далее, устанавливаем возможность построения выражения (23_2) второго и высших классов.

К этому следует прибавить, что в числе данных выражений могут быть и углы и выражения различных классов (23_j), (24_j) мы можем понимать в расширенном смысле, предполагая ω функциями тригонометрических величин от углов, образуемых кругами.

В самом деле, мы всегда можем перейти от $\omega(A)$ к $\omega(a)$, заменяя A дугой α большого круга, описанной из вершины угла A.

§ 9. Все построения второго порядка осуществляются и тогда, когда задан не весь круг Штейнера на сфере, а только сколь угодно малая дуга, т. е. и на сфере возможно то обобщение штейнеровской задачи, которое мной проведено на плоскости.

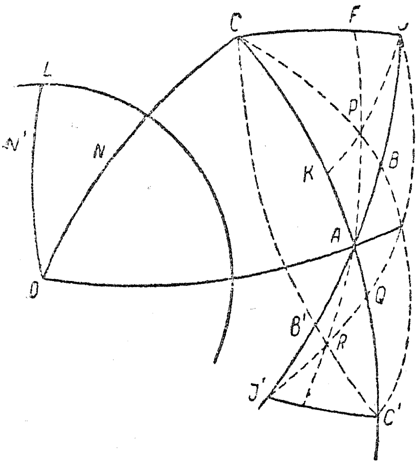
Положение будет доказано, если мы убедимся, что с помощью циркуля (I) можно определить точки пересечения любого большого круга и штейнеровского круга при задании сколь угодно малой его дуги.

Простейшим случаем является тот, когда одна точка пересечения дана и ищется вторая.

Следует взять четыре точки на дуге A, B, C, D и применить теорему Паскаля [3], которая здесь имеет место в том смысле, что точки пересечения противоположных сторон вписанного в малый круг шестиугольника

[3] Доказательство — см. Андреев, Аналитическая геометрия; Пшеборский; Млодзеевский. Следует предварительно уравнение кривой 2-го порядка на сфере привести к однородной форме (относительно x, y, z).

лежат на одном большом круге. Взяв за сторону его наш большой круг, мы определяем на ней шестую вершину обычным, хорошо известным на плоскости, построением, проводя только большие круги, т. е. только циркулем (I).



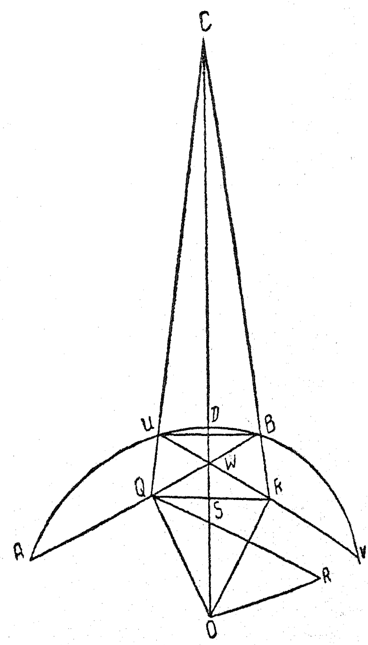
Черт. 8.

§ 10. Чтобы подойти к случаю определения **д в у х т о ч е к** пересечения со штейнеровским кругом, мы должны отметить, что операции восстановления и опускания перпендикуляров на сфере мы совершаем без штейнеровского круга. То же относится и **к у д в о е н и ю о т р е з к о в.** Для этого следует применить операции над $\triangle CAI$ § 2,5 еще над $\triangle IAC'$ и $\triangle I'AC'$, где $CC' = 180°$ и $II' = 180°$.

Проводя биссектрису IAC', определяя ее пересечение с продолжением CA Q, через Q и I проводим большой круг до пересечения с продолжением PA в R и через C' и R — большой круг, который и отсечет $B'A = AB$ (черт. 8).

§ 11. Теперь остается просто воспроизвести построение, предложенное мной на плоскости в моем обобщении задания Штейнера [4]. Разница лишь в том, что вместо прямых будем иметь большой круг.

Проводим $OQ \perp AB$ (черт. 9). Проводим произвольную прямую QR и $OS \perp QR$. Удваиваем QS так, что $RS = SQ$. К OR проводим перпендикуляр UV.



Черт. 9.

Может случиться, что UV пересечет дугу Штейнера. Если UV не пересечет, мы возьмем вместо QR другую прямую QR'. Может случиться, что $U'V'$, перпендикулярная к OR', пересечет штейнеровскую дугу.

Но может случиться, что не будет пересечения. Тогда следует рассмотреть два следующих случая:

1) дуга расположена между U' и U,

2) точка U' с той же стороны от дуги, что точка U.

В первом случае, проводя прямую QR'' между QR и QR', мы получаем с помощью тех же построений, что мы выше сделали для QR и QR', прямую $U''V''$, перпендикулярную к OR'', которая пересечет круг в U'' между U и U'. Точка U'' может упасть на штейнеровскую дугу.

В противном же случае мы сможем указать, между какими парами точек (U и U'') и (U' и U'') находится штейнеровская дуга.

Проводя QR''' между QR и QR'' или QR' и QR, мы построим прямую $U'''V'''$, пересекающую штейнеровский круг в U''', на дуге или вне

[4] D. Mordoukhay-Boltovskoy, Sur les constructions au moyen de la règle et d'un arc de cercle fixe dont le centre est connu, „Periodico di Matematiche“, Marzo 1934, Serie IV, Vol. XIV, N. 2, p. 101—111; также „Вѣстн. оп. физ. и эл. мат.“ за 1910 г., N. 522, стр. 10

ее, и в последнем случае мы сможем опять указать, между какими точками (U и U''') или (U и U') или (U'' и U''') находится дуга.

Поступая таким же образом и далее, мы получим ($U^{(k)}$, $V^{(k)}$), ($U^{(l)}$, $V^{(l)}$) такие, что одна из точек $U^{(k)}$ и $U^{(l)}$ окажется на дуге или дуга окажется между $U^{(k)}$ и $U^{(l)}$.

Так как с увеличением числа построений дуги $U^{(k)}U^{(l)}$ будут убывать без конца, после конечного числа попыток мы получим дугу $U^{(k)}U^{(l)}$, меньшую, чем данная, и потому такую, что одна из точек $U^{(k)}$ или $U^{(l)}$ окажется уже на дуге.

Если бы мы получили точки U, U' с одной стороны дуги, то заменили бы QR через QR'', образующую с QR достаточно большой угол, и после конечного числа попыток получили бы $U'''V'''$ такую, что дуга Штейнера оказалась бы между U и U''', после чего должны были бы произвести ряд только что упомянутых операций. Так что после конечного числа попыток мы получили бы большой круг, пересекающий штейнеровскую дугу.

Предполагая теперь, что UV пересекает штейнеровскую дугу и U представляет точку пересечения, мы должны будем для определения точек пересечения с AB штейнеровского круга произвести следующие построения: соединить большим кругом Q с U и соединить с R точку пересечения больших кругов OS и QR.

Тогда B будет точка пересечения AB с штейнеровским кругом. Что построение верно, это следует из того, что, во-первых, сферические треугольники QUR и QBR равны. А именно, у них общая сторона QR, углы UQR и QRB равны, как углы при основании равнобедренного треугольника $\triangle QCR$, а углы UBQ и BQR — как дополнения до прямого угла равных углов OQR и ORQ в равнобедренном треугольнике $\triangle OQR$.

Далее, остается рассмотреть $\triangle ORU$ и $\triangle OQB$. В них имеем:

$$OR = OQ, \quad RU = OB,$$

и кроме того,

$$\angle URO = \angle OQB.$$

Таким образом $OB = OU = R$, и B лежит на окружности.

(Поступило в редакцию 17/VII 1934 г.)

Sur les constructions steineriennes sur la sphère

D. Mordoukhay-Boltovskoy (Rostov sur Don)

(Résumé)

Pour les constructions steineriennes sur la sphère on doit prendre les constructions au moyen de deux compas: celui (I) qui décrit le grand cercle et (II) qui décrit les petits cercles. Au moyen du cercle de Steiner et du compas (I) on peut 1) mener le grand cercle par deux points M, N, 2) diviser l'angle en deux parties égales, 3) abaisser et lever les perpendiculaires, 4) transporter les segments et les angles, 5) construire un trirectangle avec un sommet dans le centre du cercle de Steiner, 6) doubler le segment.

En remarquant que les équations du cercle sont de la forme suivante

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on peut indiquer la forme générale de l'équation dont les racines on peut construire au moyen des compas (I), (II). Toutes les constructions élémentaires auxquelles se ramène la construction de la racine de cette équation on peut produire aussi au moyen du compas (I) et du cercle de Steiner, si l'on construit un trirectangle dans le centre du cercle de Steiner avec quelques éléments donnés, ce qu'on pourra faire d'après les résultats 1)—6). On peut remplacer le cercle entier par un arc aussi petit que l'on veut.